Cadre : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

I Construction de l'intégrale de Lebesgue

1) Intégrale de fonctions étagées

Définition 1. Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est dite étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Remarque 2. *Les fonctions étagée sont les fonctions de la forme :*

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ avec } I \text{ fini, } \alpha_i \in \mathbb{K},\ (A_i)_{i \in I} \text{ partition } \mathcal{A}\text{-mesurable de } X$$

Définition 3. Soit $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction étagée. L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par :

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha\, \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

Proposition 4. *Soit $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction étagée. Pour toute décomposition de la forme $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, on a :*

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i\, \mu(A_i)$$

Remarque 5. *On a :* $\displaystyle\int_X f\, d\mu < \infty \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) < \infty.$

Proposition 6. *L'intégrale des fonctions étagées positives est additive, croissante et homogène positive.*

Proposition 7. *Soient $A, B \in \mathcal{A}$, f étagée positive. On pose :*

$$\int_A f\, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f\, d\mu$$

Si A et B sont disjoints, on a alors :

$$\int_{A \cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$$

Proposition 8. *Soit $(E_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n$. Alors, pour toute fonction f étagée positive, on a :*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

2) Intégrales de fonctions mesurables positives

Définition 9. Pour $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable, on pose :

$$\int_X f\, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi\, d\mu \,\middle|\, \varphi \leqslant f,\ \varphi \text{ étagée positive} \right\}$$

On dit que f est intégrable si $\int_X f d\mu < \infty$.

Remarque 10. *Lorsque f est étagée positive, cette définition coïncide bien avec la première. De plus, cette intégrale est croissante.*

Théorème 11 (Beppo Levi)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors :*

$$\lim_{n \to \infty} f_n \text{ est mesurable et } \int_X \lim_{n \to \infty} f_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$$

Proposition 12. *L'intégrale des fonctions mesurables positives est additive, croissante et homogène positive.*

Proposition 13. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable, alors :*

$$\int_X f\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$$

Définition 14. Deux fonctions mesurables f et g coïncident presque partout, noté $f = g$ p.p., si elles diffèrent sur un ensemble négligeable.

Proposition 15. *Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurables. Si $f = g$ p.p., alors $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.*

Proposition 16 (Markov)**.** *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable, alors :*

$$\forall\, a > 0,\ \mu(\{f \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{a} \int_X f\, d\mu$$

3) Fonctions intégrables

Définition 17. Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{K}$ est dite intégrable si $|f|$ est intégrable. On note $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'ensemble des fonction de X dans $\mathbb{K}$ qui sont intégrables.

Définition 18. Pour $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, on note $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = -\min(0, f)$. On définit alors :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

Si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, et on pose :

$$\int_X f d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) \, d\mu$$

Exemple 19. *Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage m, on a :*

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m) = \ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |u_n| < \infty \right\}$$

Théorème 20. *L'espace $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où l'intégrale est une forme linéaire positive, et donc croissante.*

Proposition 21. *Pour $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, on a $\left|\int_X f \, d\mu\right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu$, avec égalité si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ de module 1 tel que $f = \alpha|f|$ p.p..*

4) Lien avec l'intégrale de Riemann

Théorème 22. *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ intégrable au sens de Riemann. Il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}([a, b], \mathscr{B}([a, b]), \lambda)$ égale presque partout à f et telle que $\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} g \, d\lambda$. En particulier, si $g : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue, alors g est Lebesgue-intégrable, et $\int_{[a,b]} g \, d\lambda = G(b) - G(a)$, où G est une primitive de g.*

Remarque 23. *Ce dernier théorème se généralise mal aux intégrales impropres. Le sinus cardinal est Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$, mais pas au sens de Lebesgue.*

Exemple 24. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \, dx = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-1)x} \, dx$

II Théorèmes de convergence

1) Lemme de Fatou et convergence dominée

Théorème 25 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives, alors :*

$$0 \leqslant \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leqslant +\infty$$

Application 26. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables, et que $\sup \int |f_n| \, d\lambda < \infty$, alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ est intégrable.*

Remarque 27. *Il faut la positivité, $\frac{-|x|}{n}$ contredit le lemme de Fatou.*

Théorème 28 (Convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables et $f : X \to \mathbb{K}$ telles que :*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *μ p.p.*

(ii) $\exists \, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}^+}(X, \mathcal{A}, \mu), \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ *μ p.p.*

Alors $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Application 29. *Soit f dérivable partout sur $[0, 1]$, de dérivée bornée. Alors $\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0)$.*

2) Application aux séries de fonctions

Théorème 30. *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables.*

(i) Si les φ_n sont positives, alors :

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \varphi_n d\mu$$

(ii) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |\varphi_n| d\mu < +\infty$, alors les fonctions φ_n, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n|$ et la fonction définie μ p.p. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ sont intégrables, et :

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \varphi_n d\mu$$

Application 31 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathcal{A}$, alors :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu\left(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = 0$$

III Espaces L^p

1) Définitions et premières propriétés

Définition 32. Pour tout réel $p > 0$, on définit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \,\middle|\, \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

Sauf situation ambiguë, on privilégiera la notation plus concise $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Exemple 33. *Dans le cas de la mesure de comptage, cette définition donne les espaces $\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ des suites de puissance p sommable.*

Proposition 34. *Soient $0 < p \leqslant q$ des réels.*

(i) Si μ est finie, alors $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \supset \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.

(ii) Si on considère la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, alors $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \supset \ell^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Remarque 35. *Il n'y a pas, en général, d'inclusion entre les espaces $\mathscr{L}^p$.*

Définition 36. Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{K}$ et tout $p > 0$, on définit :

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(\text{convention : } \infty^{\frac{1}{p}} = \infty\right)$$

Théorème 37 (Hölder)**.** *Soient $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$.*

Théorème 38 (Minkowski)**.** *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Définition 39. Pour $1 \leqslant p < +\infty$, on définit $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ comme l'espace vectoriel normé quotient de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ par les fonctions presque nulles. On associera par abus de langage un élément de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ à sa classe dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Définition 40. On définit le supremum essentiel de $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ par :

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess}(f) = \inf \{ M > 0 \,|\, \mu(\{f > M\}) = 0 \} \geqslant 0$$

On note $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.

Définition 41. On définit $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ comme l'espace vectoriel normé quotient de $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ par les fonctions presque nulles.

Remarque 42. *En considérant 1 et ∞ comme exposants conjugués, on retrouve les inégalités de Hölder et de Minkowski.*

Théorème 43 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un espace de Banach.*

2) Convolution, densité et régularisation

Définition 44. On appelle convolution de f et g la fonction $f * g$ définie par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \, dy$ lorsque celle-ci est bien définie.

Proposition 45. *(i) $f \in L^1$, $g \in L^p \Rightarrow \|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_p$.*

(ii) $f \in L^p$, $g \in L^q \Rightarrow \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$.

Proposition 46. *$(L^1, +, *)$ est une algèbre de Banach.*

Définition 47. Une suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions positives de L^1 d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$ est une approximation de l'unité si elles sont d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$, et si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \rho_n = 0$. Si les ρ_n sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on parle de suite régularisante.

Théorème 48. *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_n)_n$ une approximation de l'identité ($p \in [1, +\infty[$), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (\rho_n * f) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 49. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

3) Cas particulier de L^2

Définition 50. L'application $(f, g) \mapsto \langle f \,,\, g \rangle_{L^2_{\mathbb{K}}} = \int_X f g \, d\mu$ définit un produit scalaire. On note $\|.\|_{L^2_{\mathbb{K}}} = \|.\|_2$ la norme associée.

Corollaire 51. *$\left(L^2_{\mathbb{K}}(\mu), \langle \,.\,, \,.\, \rangle_{L^2_{\mathbb{K}}} \right)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 52. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

Développements

- Théorème de Riesz-Fischer (43) [Bre]
- Densité des polynômes orthogonaux (52) [BMP]

Références

[BP] Marc Briane and Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuilbert

[Bre] Haïm Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson

[BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*